

$$\text{So } \det(A) = -t^3 + 9t - 10 \neq 0$$

ssi

$$t \notin \{2, -1 - \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6}\}$$

\_\_\_\_\_ 0 \_\_\_\_\_

THM 6.27 Soient  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Volume du} \\ \text{parallépipède} \\ \text{formé par } \bar{u}, \bar{v} \text{ et } \bar{w} \end{array} \right] = \left| \det \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \end{bmatrix} \right|$$

## THM 6.36

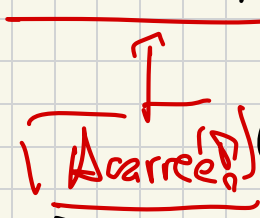
Les conditions suivantes sont equiv:  
(pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$ )

(i)  $A$  inversible

(iii) la FER de  $A$  est  $I_n$

(v)  $\forall b \in \mathbb{R}^n$  le SEL  $A \cdot \vec{x} = b$   
est compatible déterminé

(vii) les colonnes de  $A$  forment  
une famille libre de  $\mathbb{R}^n$



(ii)  $\det(A) \neq 0$

(iv)  $A$  est produit de  
matrices élémentaires

(vi)  $A \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

(viii) les colonnes de  $A$   
forment une famille  
génératrice de  $\mathbb{R}^n$

## Chapitre 7: Définitions abstraites II

Def. 7.1 | Une famille libre et génératrice  
d'un EV est appelée une base de  $V$ .

EXM | Dans  $\mathbb{R}^n$  :

$B_{\text{can}} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$e_1$     $e_2$     $e_3$     $e_n$

est une base  
appelée,  
base canonique  
de  $\mathbb{R}^n$

EXM. 7.3 |  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

| est-elle une base de  $\mathbb{R}^2$ ?

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 13 \neq 0 \Rightarrow A \text{ inversible}$$

A

$\Rightarrow$  colonnes de  $A$  forment  
famille libre et génératrice.

| Ex 7.4 | Dans  $\mathbb{P}_n = \{\text{pol de deg} \leq n\}$

| On considère  $B_{\text{can}} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$

C'est une base de  $\mathbb{R}^n$  (exercice), appelée  
base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

QUE Une base de  $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  ??

$B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow$  base canonique de  $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ .  
(exercice)

Pour  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  :  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

base canonique de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \uparrow$

THM 7.6 | Soit  $\mathcal{F} \subseteq V$  une famille génératrice de  $V$ , alors on peut trouver une base à l'intérieur de  $\mathcal{F}$ , i.e.  $\exists$  base  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ .

"Algorithme" 1) Si  $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$  fam. génératrice, et elle n'est pas une base,  $\exists v_j \in \mathcal{F}$  t.g.  $v_j = \sum_{i \neq j} c_i v_i$   
Alors  $\mathcal{F} \setminus \{v_j\}$  est génératrice.  
 $:= \{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_p\}$

2) Revenir sur 1) avec  $\mathcal{L} \setminus \{v_j\}$ .  
On s'arrête lorsqu'on trouve une base!

Lemme 7.8 | Si  $V$  est EV et  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$   
est base de  $V$ , alors toute famille de  $> n$  éléments  
est liée.

THM. 7.9 | Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases  
de  $V$ , alors  $\#(\mathcal{B}) = \#(\mathcal{B}')$ .

(c'est un corollaire du lemme 7.8!)

DEF. 7.10 | Un espace vectoriel a dimension

$n$  s'il possède une base  $\geq n$  éléments.  $\uparrow$   
Notation:  $\dim(V)$

EXM. 7.12 |  $\dim(\mathbb{R}^n) = n.$

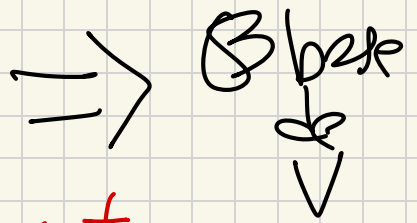
EXM. 7.13 |  $\dim(\mathbb{P}_n) = n+1$

EXM |  $\dim(M_{2 \times 3}(\mathbb{R})) = 6$

$\dim(M_{m \times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$

PROP. 7.15 | Si  $\dim(V) = n$

et  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  famille libre  
(ou génératrice)



EXM

$$\mathcal{B} = \{1 - t + t^2, t - t^2, t^2\} \subseteq \mathbb{P}_2$$

est-elle une base ?

$$\lambda_1(1 - t + t^2) + \lambda_2(t - t^2) + \lambda_3 t^2 = \textcircled{0} = \underline{0} + \underline{0t} + \underline{10t^2}$$

$$= \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t + (\lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1)t^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1 = 0 \end{array} \right.$$

SIL  $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \text{ i.e. } \mathcal{B} \text{ est libre!}$$

Comme  $\dim(\mathbb{P}_2) = 3 = \#(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$  est base!