So $\det(A) = -t^3 + 9t - 10 \neq 0$

ssi

$t \notin \{2, -1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}\}$

$\boxed{\text{THM } 6.27}$ Soient $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Alors

Volume du parallélépipède formé par $\bar{u}, \bar{v}$ et $\bar{w}$ $= \left| \det\left(\begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \end{bmatrix} \right) \right|$

THM 6.36 Les conditions suivantes sont équiv : (pour $A \in M_n(\mathbb{R})$)

(i) A inversible

(ii) $\det(A) \neq 0$

A carrée !

(iii) la FER de A est I_n

(iv) A est produit de matrices élémentaires

(v) $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ le SEL $A.\bar{x} = \bar{b}$ est compatible déterminé

(vi) $A.\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$

(vii) les colonnes de A forment une famille libre de $\mathbb{R}^n$

(viii) les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$

Chapitre 7 : Définitions abstraites II

Déf. 7.1 | Une famille libre et génératrice d'un EV est appelée une **base** de V.

EXM | Dans $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{B}_{can} := \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \dots, \underset{e_n}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

est une base appelée, **base canonique** de $\mathbb{R}^n$

EXM. 7.3 | $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} = 13 \neq 0 \Rightarrow A \text{ inversible}$$

$\Rightarrow$ colonnes de A forment famille libre et génératrice.

EXM 7.4 Dans $\mathbb{P}_n = \{\text{pol de deg} \leq n\}$

On considère $\mathcal{B}_{can} = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$

C'est une base de $\mathbb{P}_n$ (exercice), appelée base canonique de $\mathbb{P}_n$.

$\boxed{\text{QUE}}$ Une base de $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$??

$$\mathcal{B}_{can} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\longleftarrow$ base canonique de $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. (exercice)

Pour $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

base canonique de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ $\nearrow$

THM 7.6 Soit $\mathcal{F} \subseteq V$ une famille génératrice de V, alors on peut trouver une base à l'intérieur de $\mathcal{F}$, i.e. $\exists$ base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

"Algorithme" 1) Si $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ fam. génératrice, et elle n'est pas une base, $\exists v_j \in \mathcal{F}$ t.q.

$$v_j = \sum_{i \neq j} c_i v_i$$

Alors $\mathcal{F} \setminus \{v_j\}$ est génératrice.

$$:= \{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_p\}$$

2) Revenir sur 1) avec $\mathcal{F} \setminus \{v_j\}$.

On s'arrête lorsque on trouve une base !

Lemme 7.8 Si V est EV et $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est base de V, alors toute famille de $> n$ éléments est liée.

THM. 7.9 Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de V, alors $\#(\mathcal{B}) = \#(\mathcal{B}')$.

(c'est un corollaire du lemme 7.8 !)

DEF. 7.10 Un espace vectoriel a dimension n s'il possède une base à n éléments.

Notation : $\dim(V)$

EXM. 7.12 $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

EXM. 7.13 $\dim(\mathbb{P}_n) = n+1$

EXM $\dim(\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})) = 6$

$\dim(\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})) = m.n$

PROP. 7.15 Si $\dim(V)=n$ et $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ famille libre (ou génératrice) $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ base de V

EXM $\mathcal{B}=\{1-t+t^2, t-t^2, t^2\} \subseteq \mathbb{P}_2$

est-elle une base ?

$$\lambda_1(1-t+t^2)+\lambda_2(t-t^2)+\lambda_3 t^2 = \emptyset = 0+0t+0t^2$$

$$= \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t + (\lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1)t^2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1 = 0 \end{cases} \text{ SEL } \Longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}$$

i.e. $\mathcal{B}$ est libre!

Comme $\dim(\mathbb{P}_2) = 3 = \#(\mathcal{B}) \Longrightarrow \mathcal{B}$ est base!